

О свободных подгруппах в обобщенных тетраэдральных группах типа (3,8,2,2,2,2)

В.В. Беняш-Кривец

Белорусский государственный университет

Я.А. Жуковец

Учреждение образования «Белорусский государственный педагогический университет им. М. Танка»

Говорят, что группа G удовлетворяет альтернативе Титса, если G содержит либо неабелеву свободную подгруппу, либо разрешимую подгруппу конечного индекса. Обобщенные тетраэдральные группы имеют копредставление

$$\Gamma = \langle a, b, c \mid a^{k_1} = b^{k_2} = c^{k_3} = R_{12}(a, b)^l = R_{23}(b, c)^m = R_{13}(a, c)^n = 1 \rangle, \quad \text{где } k_1, k_2, k_3, l, m, n \geq 2, \quad R_{ij} -$$

циклически редуцированное слово, которое не является собственной степенью. Розенбергер и Файн в [1] выдвинули гипотезу, что каждая обобщенная тетраэдральная группа удовлетворяет альтернативе Титса. К настоящему времени эта гипотеза доказана для всех обобщенных тетраэдральных групп (см. [1, 2]), кроме групп, имеющих копредставление $\Gamma = \langle a, b, c \mid a^{k_1} = b^{k_2} = c^{k_3} = (a^\alpha b^\beta)^2 = (b^\gamma c^\delta)^{k_4} = R_{13}(a, c)^n = 1 \rangle$, для которого

выполнено одно из условий: 1) $\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} + \frac{1}{n} \geq 1, k_4 = 2$; 2) $R_{13} = a^n c^0, n = 3, 4, 5, k_4 = 3$,

$$\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} + \frac{1}{n} \geq \frac{7}{6}; \quad 3) \quad R_{13} = a^{n_1} c^{0_1} a^{n_2} c^{0_2}, \quad k_4 = 3, \quad \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} \geq \frac{2}{3}.$$

В данной работе мы рассмотрим группы вида $\Gamma = \langle a, b, c \mid a^3 = b^8 = c^2 = R(a, b)^2 = (a^\alpha c)^2 = (b^\beta c)^2 = 1 \rangle$. Без ограничения общности мы можем считать, что $\alpha = 1$ (заменяв в противном случае образующую a на $a_1 = a^2$). Если β нечетно, то подходящим автоморфизмом циклической группы $\langle b \mid b^8 = 1 \rangle$ мы можем перейти к следующему копредставлению группы Γ : $\Gamma = \langle a, b, c \mid a^3 = b^8 = c^2 = R(a, b)^2 = (ac)^2 = (bc)^2 = 1 \rangle$. Для таких групп Γ доказывается следующая

Теорема 1. Пусть $\Gamma = \langle a, b, c \mid a^3 = b^8 = c^2 = R(a, b)^2 = (bc)^2 = (ac)^2 = 1 \rangle$ – обобщенная тетраэдральная группа, где $R(a, b) = a^{k_1} b^{l_1} a^{k_2} b^{l_2} \dots a^{k_s} b^{l_s}$, $1 \leq k_i \leq 2, 1 \leq l_i \leq 7$. Положим $K = k_1 + \dots + k_s, L = l_1 + \dots + l_s$. В следующих случаях Γ содержит неабелеву свободную подгруппу и, следовательно, удовлетворяет альтернативе Титса: 1) s – нечетное; 2) s – четное и либо $K \not\equiv 0 \pmod{3}$, либо $L \not\equiv 4 \pmod{8}$; 3) $s < 12$.

Рассмотрим подгруппу Γ_1 группы Γ , порожденную элементами a, b . Тогда $\Gamma_1 \triangleleft \Gamma$, индекс $[\Gamma : \Gamma_1] = 2$ и Γ_1 имеет копредставление $\Gamma_1 = \langle a, b \mid a^3 = b^8 = R(a, b)^2 = R(a^{-1}, b^{-1})^2 = 1 \rangle$. Таким образом, если Γ_1 содержит свободную неабелеву подгруппу, то и Γ содержит такую подгруппу.

Далее мы будем обозначать через $[A]$ образ матрицы $A \in SL_2(\mathbb{C})$ в $PSL_2(\mathbb{C})$, через $\text{tr } A$ – след матрицы A . Подгруппа $H \subset PSL_2(\mathbb{C})$ называется элементарной, если любые два элемента бесконечного порядка из H имеют общий ненулевой собственный вектор. Неэлементарная подгруппа H из $PSL_2(\mathbb{C})$ содержит неабелеву свободную подгруппу [3]. Там же доказано, что если H порождена двумя элементами $[A], [B]$, то H неэлементарна тогда и только тогда, когда H неприводима, бесконечна и отлична от бесконечной группы диэдра. При этом H является бесконечной группой диэдра в точности тогда, когда хотя бы два из трех чисел $\text{tr } A, \text{tr } B, \text{tr } AB$ равны нулю. Конечными подгруппами в $PSL_2(\mathbb{C})$ являются: циклические группы, группы диэдра D_n , а также A_4, S_4, A_5 . Нетрудно показать, что элемент $[X] \in PSL_2(\mathbb{C})$ имеет порядок $n \geq 2$ тогда

и только тогда, когда $\operatorname{tr} X = 2 \cos \frac{\pi u}{n}$, где $(u, n) = 1$. Гомоморфизм

$\rho: \Gamma' = \langle a, b \mid a^k = b^l = R(a, b)^m = R(a^{-1}, b^{-1})^m = 1 \rangle \rightarrow PSL_2(\mathbb{C})$ будем называть существенным, если образы элементов $a, b, R(a, b), R(a^{-1}, b^{-1})$ имеют порядки k, l, m, m соответственно. Группу Γ' будем называть псевдоконечной, если образ $\rho(\Gamma')$ конечен для любого существенного представления ρ . Идея доказательства теоремы 1 состоит в том, чтобы построить представление $\rho: G \rightarrow PSL_2(\mathbb{C})$, где G – исследуемая группа, такое, что $\rho(G)$ – неэлементарная подгруппа. Мы используем стандартные факты и обозначения из теории характеров Фрике (см., например, [4-6])

Отметим также следующий факт: пара матриц $A, B \in SL_2(\mathbb{C})$ порождает приводимую подгруппу тогда и только тогда, когда $\operatorname{tr} ABA^{-1}B^{-1} = 2$, а это равносильно условию

$$(\operatorname{tr} A)^2 + (\operatorname{tr} B)^2 + (\operatorname{tr} AB)^2 - \operatorname{tr} A \operatorname{tr} B \operatorname{tr} AB - 4 = 0. \quad (1)$$

Рассмотрим группу $\Gamma_1 = \langle a, b \mid a^3 = b^8 = R(a, b)^2 = R(a^{-1}, b^{-1})^2 = 1 \rangle$. Пусть $Q_R(x, y, z)$ – полином Фрике элемента R . Положим $g(z) = Q_R(1, 2 \cos \frac{\pi}{8}, z)$. Если z_0 – корень $g(z)$, то существуют матрицы $A, B \in SL_2(\mathbb{C})$ такие, что $\operatorname{tr} A = 1$, $\operatorname{tr} B = 2 \cos \frac{\pi}{8}$, $\operatorname{tr} AB = z_0$ и $\operatorname{tr} R(AB) = 0$ (см. [7], лемма 2). Тогда $[A]^3 = [B]^8 = R^2([A], [B]) = 1$ и, так как

$$\operatorname{tr} R(A^{-1}, B^{-1}) = Q_R(\operatorname{tr} A^{-1}, \operatorname{tr} B^{-1}, \operatorname{tr} A^{-1}B^{-1}) = Q_R(\operatorname{tr} A, \operatorname{tr} B, \operatorname{tr} AB) = g(z_0) = 0,$$

то отображение $a \rightarrow [A], b \rightarrow [B]$ задает представление группы Γ_1 . Пусть z_0 – некоторый корень полинома $g(z)$. Обозначим через $G(z_0)$ группу, порожденную $[A], [B]$. Так как $\operatorname{tr} A = 1$ и $\operatorname{tr} B = 2 \cos \frac{\pi}{8}$, то $G(z_0)$ не является группой диэдра, а также отлична от групп A_4, S_4, A_5 [3]. Если

z_0 не является корнем уравнения $z^2 - 2 \cos \frac{\pi}{8} z - 3 + 4 \cos^2 \frac{\pi}{8} = 0$, т.е. $z_0 \neq 2 \cos \frac{11\pi}{24}, z_0 \neq 2 \cos \frac{5\pi}{24}$, то из (1) следует, что группа $G(z_0)$ неприводима, а следовательно неэлементарна. В этом случае группа Γ_1 содержит свободную неабелеву подгруппу.

Лемма 1. Если s – нечетное, то существует существенный гомоморфизм $\rho: \Gamma_1 \rightarrow PSL_2(\mathbb{C})$ с неэлементарным образом.

Доказательство. Пусть не существует существенного гомоморфизма $\rho: \Gamma_1 \rightarrow PSL_2(\mathbb{C})$ с неэлементарным образом. В этом случае многочлен $g(z)$ имеет вид:

$$g(z) = A_0 \left(z - 2 \cos \frac{11\pi}{24} \right)^{s_1} \left(z - 2 \cos \frac{5\pi}{24} \right)^{s_2}, \text{ где } s_1 + s_2 = s. \text{ Пусть для определенности } s_1 > s_2. \text{ Чтобы}$$

найти коэффициент A_0 , рассмотрим полиномы $P_n(x)$, которые удовлетворяют начальным условиям $P_{-1}(x) = 0, P_0(x) = 1$ и рекуррентному соотношению $P_{n+1}(x) = xP_n(x) - P_{n-1}(x)$. В [8] доказано, что если $w = g^{u_1} h^{v_1} \cdots g^{u_s} h^{v_s} \in F_2$, где $s \geq 1$, — циклически редуцированное слово, и $x = \tau_g, y = \tau_h, z = \tau_{gh}$, то полином Фрике $Q_w \in \mathbb{Z}[x, y, z]$ имеет вид

$$Q_w(x, y, z) = M_s(x, y)z^s + \cdots + M_0(x, y), \text{ где } M_s(x, y) = \prod_{i=1}^s P_{u_i-1}(x)P_{v_i-1}(y). \text{ Следовательно,}$$

$$A_0 = \prod_{i=1}^s P_{k_i-1}(1)P_{l_i-1}\left(2 \cos \frac{\pi}{8}\right) = \left(2 \cos \frac{\pi}{8}\right)^{h_1} (\sqrt{2}+1)^{h_2} (\sqrt{2})^{h_3}, \text{ где } h_1 - \text{количество двоек, четверок и шестерок среди } l_i; h_2 - \text{количество троек и пятерок среди } l_i; h_3 - \text{количество четверок среди } l_i.$$

Имеем $g(z) = Q_R(1, 2 \cos \frac{\pi}{8}, z) \in K[z]$, где $K = \mathbb{Q}(2 \cos \frac{\pi}{8})$. Запишем

$$g(z) = A_0 \left(z - 2 \cos \frac{11\pi}{24} \right)^{s_1 - s_2} \left(z^2 - 2 \cos \frac{\pi}{8} z - 1 + \sqrt{2} \right)^{s_2}.$$

Рассмотрим коэффициент $M_{s_1+s_2-1} = A_0 \left(-2 \cos \frac{11\pi}{24} (s_1 - s_2) - 2 \cos \frac{\pi}{8} s_2 \right)$ при $z^{s_1+s_2-1}$. Так как $2 \cos \frac{11\pi}{24} \notin K$ и $s_1 - s_2 \neq 0$, то $M_{s_1+s_2-1} \notin K$. Получили противоречие. Аналогичный результат получим при $s_1 < s_2$. Лемма доказана.

Лемма 2. Если $g(z) = A_0 \left(z - 2 \cos \frac{11\pi}{24} \right)^{s_1} \left(z - 2 \cos \frac{5\pi}{24} \right)^{s_2}$, то s четно, $s_1 = s_2$ и $K \equiv 0 \pmod{3}$, $L \equiv 4 \pmod{8}$, где $K = k_1 + \dots + k_s$, $L = l_1 + \dots + l_s$.

Доказательство. Если $s_1 \neq s_2$, то $g(z)$ не может иметь требуемый вид, как следует из доказательства леммы 1. Положим $A = \begin{pmatrix} \varepsilon^8 & 1 \\ 0 & \varepsilon^{-8} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \varepsilon^3 & 0 \\ t & \varepsilon^{-3} \end{pmatrix}$, где $\varepsilon = \cos \frac{\pi}{24} + i \sin \frac{\pi}{24}$. Тогда $\text{tr } A = 2 \cos \frac{\pi}{3} = 1$, $\text{tr } B = 2 \cos \frac{\pi}{8}$, $\text{tr } AB = t + 2 \cos \frac{11\pi}{24}$. Имеем равенство $\text{tr } R(A, B) = g \left(t + 2 \cos \frac{11\pi}{24} \right) = A_0 t^{s_1} \left(t + 2 \cos \frac{11\pi}{24} - 2 \cos \frac{5\pi}{24} \right)^{s_2}$. В этом случае свободный член в $g \left(t + 2 \cos \frac{11\pi}{24} \right)$ равен нулю.

С другой стороны, свободный член полинома $\text{tr } R(A, B)$ равен $2 \cos \frac{8K+3L}{24} \pi$. Следовательно, $K \equiv 0 \pmod{3}$, $L \equiv 4 \pmod{8}$.

Следствие. Если s – нечетное или s – четное и существует существенный гомоморфизм $\rho: \Gamma_1 \rightarrow \text{PSL}_2(\mathbb{C})$ с неэлементарным образом, то группа Γ_1 содержит неабелеву свободную подгруппу.

Таким образом, в дальнейшем будем рассматривать группы, для которых $K \equiv 0 \pmod{3}$, $L \equiv 4 \pmod{8}$. Рассмотрим группу $H_1 = \langle a_1, b_1 \mid a_1^3 = b_1^4 = R_1(a_1, b_1)^2 = R_1(a_1^{-1}, b_1^{-1})^2 = 1 \rangle$, где $R_1(a_1, b_1) = a_1^{u_1} b_1^{v_1} \dots a_1^{u_t} b_1^{v_t}$ – циклическая редукция слова $R(a_1, b_1)$ в свободном произведении $\langle a_1 \mid a_1^3 = 1 \rangle * \langle b_1 \mid b_1^4 = 1 \rangle$. Пусть $U = u_1 + \dots + u_t$, $V = v_1 + \dots + v_t$. Тогда $K \equiv U \pmod{3}$, $L \equiv V \pmod{4}$ т. е. $U = 3U_1$, $V = 4V_1$. Рассмотрим сюръективный гомоморфизм $\phi: \Gamma_1 \rightarrow H_1: a \mapsto a_1, b \mapsto b_1$. Если H_1 содержит свободную неабелеву подгруппу, то этим же свойство обладает и группа Γ_1 . Если $t = 0$, т. е. R_1 – пустое слово, то H_1 является свободным произведением циклических групп порядка 3 и 4, а поэтому содержит неабелеву свободную подгруппу. Поэтому в дальнейшем будем считать, что $t > 0$.

Лемма 3. Если $U = 3U_1$, $V = 4V_1$ и $t < 12$, то с точностью до изоморфизма существует 5 псевдоэлементарных групп $T_i = \langle a_i, b_i \mid a_i^3 = b_i^4 = R_{i,i}(a_i, b_i)^2 = R_{i,i}(a_i^{-1}, b_i^{-1})^2 = 1 \rangle$.

Соответствующие слова $R_{i,i}(a_i, b_i)$ имеют вид: $R_{1,1} = a_1 b_1^2 a_1^2 b_1^2$, $R_{1,2} = a_1 b_1 a_1^2 b_1^2 a_1^2 b_1^3 a_1^2 b_1^2$, $R_{1,3} = a_1 b_1 a_1 b_1^3 a_1^2 b_1^2 a_1 b_1^3 a_1^2 b_1 a_1^2 b_1^2$, $R_{1,4} = a_1 b_1 a_1^2 b_1 a_1 b_1^3 a_1^2 b_1^2 a_1 b_1 a_1^2 b_1^3 a_1 b_1^3 a_1^2 b_1^2$, $R_{1,5} = a_1 b_1 a_1^2 b_1 a_1 b_1^3 a_1^2 b_1^3 a_1 b_1^2 a_1 b_1^3 a_1^2 b_1 a_1^2 b_1^2$.

Псевдоконечные группы из леммы 3 найдены с помощью компьютерных вычислений с программой Maple. Следующая лемма завершает доказательство теоремы 1.

Лемма 4. Группы T_i , $1 \leq i \leq 5$, содержат неабелеву свободную подгруппу.

Доказательство.

Рассмотрим

факторгруппы

$T'_i = \langle a_{1,i}, b_{1,i} \mid a_{1,i}^3 = b_{1,i}^2 = R'_{1,i}(a_{1,i}, b_{1,i})^2 = R'_{1,i}(a_{1,i}^{-1}, b_{1,i}^{-1})^2 = 1 \rangle$ групп T_i где $R'_{1,i}(a_{1,i}, b_{1,i})$ – циклическая редукция слова $R_{1,i}(a_{1,i}, b_{1,i})$ в свободном произведении $\langle a_{1,i} \mid a_{1,i}^3 = 1 \rangle * \langle b_{1,i} \mid b_{1,i}^2 = 1 \rangle$. Ясно, что группы T'_i имеют копредставление $T'_i = \langle a_{1,i}, b_{1,i} \mid a_{1,i}^3 = b_{1,i}^2 = 1 \rangle$, т. е. являются свободным произведением циклических групп порядка 2 и 3, а поэтому содержат неабелеву свободную подгруппу. Следовательно, группы T_i также содержат неабелеву свободную подгруппу.

Рассмотрим теперь группу Γ с копредставлением

$$\Gamma = \langle a, b, c \mid a^3 = b^8 = c^2 = R(a, b)^2 = (ac)^2 = (b^{2\beta}c)^2 = 1 \rangle.$$

Справедлива

Теорема 2. *Группа $\Gamma = \langle a, b, c \mid a^3 = b^8 = c^2 = R(a, b)^2 = (ac)^2 = (b^{2\beta}c)^2 = 1 \rangle$ содержит неабелеву свободную подгруппу и, следовательно, удовлетворяет альтернативе Титса.*

Доказательство. Пусть $R(a, b) = a^{k_1}b^{l_1}a^{k_2}b^{l_2} \dots a^{k_s}b^{l_s}$, $1 \leq k_i \leq 2, 1 \leq l_i \leq 7$. Положим $K = k_1 + \dots + k_s$, $L = l_1 + \dots + l_s$. Если либо $K \not\equiv 0 \pmod{3}$, либо $L \not\equiv 4 \pmod{8}$, то из леммы 2 следует, что полином Фрике $g(z) = Q_R(1, 2\cos\frac{\pi}{8}, z)$ отличен от $A_0 \left(z - 2\cos\frac{11\pi}{24} \right)^{s_1} \left(z - 2\cos\frac{5\pi}{24} \right)^{s_2}$.

Следовательно, группа $G = \langle a, b \mid a^3 = b^8 = R(a, b)^2 = 1 \rangle$ имеет представление ρ в $PSL_2(\mathbb{C})$ с неэлементарным образом. Пусть $\rho(a) = [A], \rho(b) = [B]$. Нетрудно показать, что найдется матрица C такая, что $\text{tr } AC = \text{tr } BC = 0$. Тогда справедливы соотношения

$$[A]^3 = [B]^8 = [C]^2 = R^2([A], [B]) = ([A][C])^2 = ([B]^{2\beta}[C])^2 = 1,$$

т.е. группа $\langle [A], [B], [C] \rangle$ является гомоморфным образом Γ . Поскольку подгруппа $\langle [A], [B] \rangle$ содержит неабелеву свободную подгруппу, то и Γ обладает этим свойством.

Пусть теперь $K \equiv 0 \pmod{3}$, $L \equiv 4 \pmod{8}$. Рассмотрим группу $\Gamma_2 = \langle a_1, b_1, c_1 \mid a_1^3 = b_1^2 = c_1^2 = R_1(a_1, b_1)^2 = (a_1c_1)^2 = 1 \rangle$, где $R_1(a_1, b_1) = a_1^{u_1}b_1^{l_1} \dots a_1^{u_r}b_1^{l_r}$ – циклически редуцированное слово, получающееся из $a_1^{k_1}b_1^{l_1} \dots a_1^{k_s}b_1^{l_s}$ в свободном произведении $\langle a_1 \mid a_1^3 = 1 \rangle * \langle b_1 \mid b_1^2 = 1 \rangle$. Очевидно, группа Γ_2 является факторгруппой группы Γ . Поскольку $L \equiv 4 \pmod{8}$, то r – четно. Группа Γ_2 следующим образом разлагается в свободное произведение с объединенной подгруппой:

$$\Gamma_2 = \langle a_1, b_1 \mid a_1^3 = b_1^2 = R(a_1, b_1)^2 = 1 \rangle *_{\langle a_1 \mid a_1^3 = 1 \rangle} \langle a_1, c_1 \mid a_1^3 = c_1^2 = (a_1c_1)^2 = 1 \rangle.$$

Поскольку группа $H = \langle a_1, b_1 \mid a_1^3 = b_1^2 = R(a_1, b_1)^2 = 1 \rangle$ либо бесконечна, либо имеет порядок больше 6 (это следует из классификации конечных обобщенных треугольных групп в [10]), то индекс циклической подгруппы $\langle a_1 \mid a_1^3 = 1 \rangle$ в H отличен от 2. Хорошо известно, что в этом случае свободное произведение с объединенной подгруппой содержит неабелеву свободную подгруппу. Теорема 2 доказана.

1. Fine B., Rosenberger G. // Algebraic generalizations of discrete groups. New York, 1999. P. 274.

2. Howie J., Kopteva N. // J. Group Theory. 2006. Vol. 9. P. 173.

3. Majeed A., Masson A.W. // Glasgow Math. J. 1978. Vol. 19. P. 45.

4. Horowitz R. // Comm. Pure Appl. Math. 1972. Vol. 25. P. 635.

5. Magnus W. // Result. der Math. 1981. Vol. 4. P. 171.

6. Culler M., Shalen P. // Ann. of Math. 1983. V. 117. P. 109.

7. Беняш-Кривец В.В., Хуа Сюин. // Известия Гомельского госуниверситета. 2008. № 2 (74). С. 13.
8. Traina C. // Proc. Amer. Math. Soc. 1980. Vol. 79. P. 369.
9. Vinberg E.B., Kaplinsky R. // Groups: topological, combinatorial and arithmetic aspects. Papers from the conference, Bielefeld, 1999. Cambridge, 2004. LMS Lecture Note Series 311. P. 564.
10. Howie J., Metafsis V., Thomas R. // Trans. Amer. Math. Soc. 1995. Vol. 347. P. 3613.

РЕПОЗИТОРИЙ БГПУ